$L_q(Q)/C, \ (1 < p \leq q < \infty)$

$$\|I\|^{(\chi)} \leq pq^{1/q}(q/(q-1))^{(p-1)/p} \lim_{\delta\to 0} N_\delta$$

and

$$\|I\|^{(\chi)} \geq 1/\gamma \lim_{\delta\to 0} N_\delta,$$

where N_δ is the well-known Muckenhoupt's constant, $\|I\|^{(\chi)}$ - the upper χ-norm of the operator I, $\gamma > 0$ is some constant independent of p and q.

In particular, the embeddings operator W_p^1 into L_q is compact if and only if

$$\lim_{\delta\to 0} N_\delta = 0,$$

i.e.the Muckenhoupt's constant is a measure of noncompactness of special Sobolev embeddings.

The class $\Im$ contains Sobolev spaces on the generalized ridged domain which was considered by W.D.Evans and D.J.Harris. But in this paper the concept of the generalized ridged domain is not used, i.e. an existence of one is not assumed. Furthermore, the obove-mentioned authors considered only the case $p = q$.

Klevchihin Yu.A., Frolov N.N. On the multiplicateurs Hermite series in L^p spaces.

Fourier-Hermite series of functions on Hilbert space are considered in this paper. Theorems for multipliers in spaces L^p is established. The criterion for multipliers to belong to the space $M_\infty = (L^\infty, L^\infty)$ is proved. The sufficient conditions for multipliers to belong to the space $M_p = (L^p, L_p)$ are given.

Kovalev L.V. On the problem of extremal partition with the free poles on the circle.

The exact upper estimate for the product of inner radii of the nonoverlapping domains is obtained. Let $a_k = \exp(i\theta_k), k = 1, \ldots, n$ $(n \geq 5)$ are points on the unit circle, $0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots \theta_n < 2\pi$, $\theta_{k+1} - \theta_k \leq 2\pi/\sqrt{\alpha}$, $k = 0, 1, \ldots, n(\theta_0 = \theta_n - 2\pi$, $\theta_{n+1} = 2\pi)$, where $0 < \alpha \leq n$. For any pairwise nonoverlapping domains D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{C}_z$, $k = 0, 1, \ldots, n$, the inequality

$$r^\alpha(D_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k) \leq \frac{4^{\alpha/n+n}\alpha^{\alpha/n}n^n}{(n^2-\alpha)^{\alpha/n+n}} \left[\frac{n-\alpha^{1/2}}{n+\alpha^{1/2}}\right]^{2\alpha^{1/2}}$$

holds. Here $a_0 = 0$ and $r(D, a)$ denotes the inner radius of the domain D with respect to the point a. The equality is attained for the points $\alpha_k = \exp(2\pi i(k-1)/n)$, $k = 1, \ldots, n$. For $\alpha = 1$ and $n = 1, 2$ this is a classical result of the theory of function.

Kovtanyuk A.E. Special boundary conditions for transport equation.

The transport equation which describes the passing of radiation through some medium is considered. We know [1], [2] that using special conditions for input flow of radiation allows to determine the inner structure of the considered medium. Construction of the external source of radiation which ensures implementation special boundary conditions is proposed.

Konovalova D.S., Chebotarev A.Yu. An optimal starting control for a flow of the viscous fluid.

The initialization problem for Navier-Stokes equations is formulated as an optimal control problem. The existence of the solution is established directly. The optimality system is obtained and properties of the optimal initial conditions are considered. A boundness of the set of the solution is established. By introducing sufficiency conditions for the optimality, we deduce conditions under which there are finitely many elements in the set and conditions guarantying the uniqueness of the solution.

Semenov I.V., Gusev S.B. The destruction of celestial bodies on impact with the earth surface.

A model of shock destruction of a celestial body is suggested which explains apparent disagreement between durability characteristics measured by testing of fragments of celestial bodies (meteorites) which have struck against Earth's surface and observed heights of meteorites destruction. Explicit consideration of structure

УДК 517.54

©1996 Л.В. Ковалев

К ЗАДАЧЕ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ СО СВОБОДНЫМИ ПОЛЮСАМИ НА ОКРУЖНОСТИ

(Представлено д.ф.-м.н. В.Н. Дубининым)

Задачи об экстремальном разбиении хорошо известны в геометрической теории функций [1-6]. В данной заметке доказывается теорема о произведении внутренних радиусов неналегающих областей относительно n свободных точек на единичной окружности и одной фиксированной точки в ее центре. Этот результат частично решает задачу, поставленную в обзорной статье [6, стр. 68]. Всюду ниже $r(D,a)$ означает внутренний радиус области D относительно точки a.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $a_k = exp(i\theta_k)$, $k=1,...,n$, $n \geq 5$ *– точки единичной окружности, причем* $0=\theta_1<\theta_2<...\theta_n<2\pi, \theta_{k+1}-\theta_k \leq 2\pi/\sqrt{\alpha}$, $k=0,1,...,n$ $(\theta_o=\theta_n-2\pi,\ \theta_{n+1}=2\pi)$, *где* α *– фиксированное число* $0<\alpha\leq n$. *Тогда для любых попарно непересекающихся областей* D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}}$ $k=0,1,...,n$ $(a_o=0)$ *справедливо неравенство*

$$r^{\alpha}(D_o,a_o)\prod_{k=1}^{n} r(D_k,a_k) \leq \frac{4^{\alpha/n+n}\alpha^{\alpha/n}n^n}{(n^2-\alpha)^{\alpha/n+n}}\left[\frac{n-\alpha^{1/2}}{n+\alpha^{1/2}}\right]^{2\alpha^{1/2}}.$$

Знак равенства достигается для точек $\alpha_k = exp(i2\pi k/n)$, $k=1,...,n$, *и круговых областей относительно квадратичного дифференциала*

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^n(n^2-\alpha)+\alpha}{z^2(z^n-1)^2}dz^2.$$

Доказательство. Положим $\varphi_k=\theta_{k+1}-\theta_k$; $\beta_k=\{z:\theta_k<argz<\theta_{k+1}\}$; $\zeta=\rho_k(z)\equiv -i(zexp(-i\theta_k))^{\pi/\varphi_k}$, $z\in\beta_k, k=0,1,...,n$. Следуя [7] осуществим разделяющие преобразования области D_k относительно пары функций $\{p_{k-1},p_k\}$. Пусть $\{D_k^{(1)},D_k^{(2)}\}$ – результат такого преобразования. В итоге получим

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k,a_k) \leq \prod_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k}{\pi}\sqrt{r(D_k^{(2)},-i) \qquad r(D_{k+1}^{(1)},\,i)}, \tag{1}$$

$(D_{n+1}^{(1)}=D_1^{(1)})$. Обозначим через $\{D_o^{(k)}\}_{k=1}^n$ результат разделяющего преобразования области D_o относительно семейства функций $\{p_k\}_{k=1}^n$. Теорема 2 работы [7] дает

$$r^{\alpha}(D_o,a_o) \leq \prod_{k=1}^{n}[r(D_o^{(k)},0)]^{\frac{\alpha}{2}(\frac{\varphi_k}{\pi})^2} \tag{2}$$

По теореме 1 работы [8] имеем

$$\left(\frac{\varphi_k}{\pi}\right)^2\left[r(D_o^{(k)},0)\right]^{\alpha(\frac{\varphi_k}{\pi})^2} r(D_k^{(2)},-i)\, r(D_{k+1}^{(1)},\,i) \leq \Phi(u_k'), \tag{3}$$

где $u_k'=\sqrt{\alpha}\varphi_k/\pi$, $\quad k=1,...,n$,

$$\Phi(u)=(2^6/\alpha)2^{u^2}u^{u^2+2}(2-u)^{-(2-u)^2/2}(2+u)^{-(2+u)^2/2}, 0<u<2.$$

Знак равенства в (3) достигается для круговых областей относительно квадратичного дифференциала

$$Q_k(\zeta)d\zeta^2 = -\frac{-\zeta^2[4-\alpha(\varphi_k/\pi)^2]+\alpha(\varphi_k/\pi)^2}{\zeta^2(1+\zeta^2)^2}d\zeta^2.$$

Далее нам понадобится вспомогательная

ЛЕММА 1. *Пусть* $\Psi(u) = log(\alpha\Phi(u)/16)$ *и пусть максимум функции* $F(u_1,...u_n) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=1}^{n}\Psi(u_k)$ *при условиях* $0 < u_k \le 2$, $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 2\sqrt{\alpha}$ *достигается в точке* $(u_1^*,...,u_n^*)$. *Тогда*

$$\begin{array}{lll}(а)\ \textit{если} & u_i^* < u_j^* < 2, & \textit{то}\ \ \Psi'(u_i^*) = \Psi'(u_j^*) \\ (б)\ \textit{если} & u_i^* < u_j^* = 2, & \textit{то}\ \ \Psi'(u_i^*) \le 1.\end{array}$$

Доказательство.

(а) Предположим противное: например $\Psi'(u_i^*) < \Psi'(u_j^*)$. Пусть $f(x) = \Psi(u_i^* - x) + \Psi(u_j^* + x)$, тогда $f'(0) = -\Psi'(u_i^*) + \Psi'(u_j^*) > 0$, поэтому для любого $\delta > 0$ существует $x \in (0,\delta)$ такой, что $\Psi(u_i^* - x) + \Psi(u_j^* + x) > \Psi(u_i^*) + \Psi(u_j^*)$, что противоречит условию.

(б) Предположим, что $\Psi'(u_i^*) > 1$. Пусть $f(x) = \Psi(u_i^* + x) + \Psi(2 - x)$, тогда $f'(0) = \Psi'(u_i^*) - \Psi'(2) = \Psi'(u_i^*) - 1 > 0$, поэтому для любого $\delta > 0$ существует $x \in (0,\delta)$, причем $\Psi(u_i^* + x) + \Psi(2 - x) > \Psi(u_i^*) + \Psi(2)$, что противоречит условию.

Лемма 1 доказана.

Учитывая (1)-(3), заключаем, что для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости следующего утверждения.

ЛЕММА 2. *Если функция* $F(u_1,...u_n)$ *достигает максимума в точке* $(u_1^*,...u_n^*)$ *при условии* $0 < u_k \le 2$, $k = 1,...n$, $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 2\sqrt{\alpha}$ $(n \ge 5, \alpha \le n)$, *то* $u_1^* = u_2^* ... = u_n^*$

Доказательство. Можно считать, что $u_1^* \le u_2^* \le ... \le u_n^*$. Функция $\Psi''(u) = log(4u^2/(4-u^2)) - 2u^{-2}$, очевидно, строго возрастает на $(0,2)$ и существует $u_o \in (1,32;1,33)$ такое, что $sign\ \Psi''(u) \equiv sign(u - u_o)$.

Если $u_n^* \le u_o$, то в силу строгой монотонности $\Psi'(u)$ на $[0,u_o]$ из пункта (а) леммы 1 получаем, что $u_1^* = ... = u_n^*$.

Предположим, что $u_o < u_n^* \le 1,8$, тогда в силу возрастания $\Psi'(u)$ на $[u_o,2]$ $\Psi'(u_n^*) \le \Psi'(1,8) < 0,33$.

Рассмотрим функцию $f(x) = (2\sqrt{x} - a)/(x-1)$ (здесь $a < 2$), она убывает при $x > 4$, так как для всех $x > 4$ $f'(x) = (a - \sqrt{x} - 1/\sqrt{x})/(x-1)^2 < (a-2)/(x-1)^2 < 0$. Следовательно, для всех $n \ge 5$

$$(n-1)^{-1}\cdot\sum_{k=1}^{n-1} u_k^* = (2\sqrt{\alpha} - u_n^*)/(n-1) \le$$

$$\le (2\sqrt{n} - u_o)/(n-1) \le (2\sqrt{5} - u_o)/4 < 0,79,$$

откуда $u_1^* < 0,79$. В силу убывания $\Psi'(u)$ на $(0,u_o)$ получаем

$$\Psi'(u_1^*) > \Psi'(0,79) > 0,62 > 0,33 > \Psi'(u_n^*),$$

что противоречит пункту (а) леммы 1.

Если $1,8 < u_n^* \le 2$, то в силу возрастания $\Psi'(u)$ на $[u_o,2]$ имеем $\Psi'(u_n^*) \le \Psi'(2) = 1$. Так как

$$(n-1)^{-1}\cdot\sum_{k=1}^{n-1} u_k^* = (2\sqrt{\alpha - u_n^*})/(n-1) <$$

$$< (2\sqrt{n-1,8)/(n-1)} \le (2\sqrt{5-1,8})/4 < 0,67,$$

получаем, что $\Psi'(u_1^*) > \Psi'(0,67) > 1$, что противоречит лемме 1.

Лемма 2 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-00277).

Список литературы

1. *Лебедев Н.А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука, 1975.

2. *Кузьмина Г.В.* Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. Т. 139. Л.: Наука. 1980.

3. *Кузьмина Г.В.* Геометрическая теория функций: методы и результаты // Изв. вузов. Математика. 1986. N 10. С. 17–33.

4. *Емельянов Е.Г.* К задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. Матем. ин-т им. В.А. Стеклова. Ленингр. отд-ние 1986. Т. 154. С. 76–89.

5. *Duren P.L., Schiffer M.M.* Comformal mappings onto nonoverlapping regions // Complex analysis. Basel: Birkhauser Verlag. 1988. P. 27–39.

6. *Дубинин В.Н.* Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного // УМН 1994. Т. 49. Вып. 1. С. 3–76.

7. *Дубинин В.Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. Матем. ин-т им. В.А. Стеклова. Ленингр. отд-ние 1988. Т. 168. С. 48–66.

8. *Дубинин В.Н.* Метод симметризации в задачах о неналегающих областях // Матем. сб. 1985. Т. 128, N 1. С. 110–123.

Институт прикладной математики
ДВО РАН

Поступило в редакцию
1.VII.1995